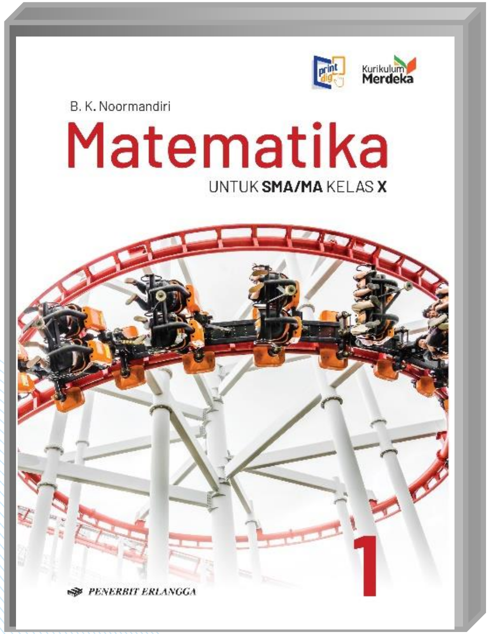


MEDIA MENGAJAR

MATEMATIKA

UNTUK SMA/MA KELAS X

Kurikulum Merdeka

BAB 1

EKSPONEN DAN LOGARITMA

Sumber gambar: Shutterstock.com

1.1 Bentuk Pangkat

Definisi Pangkat Bulat Positif:

Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif dan a bilangan real maka a^n didefinisikan sebagai perkalian n faktor yang masing- masing faktornya ialah a.

$$\boldsymbol{a^n} = \underbrace{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} \times \ldots \times \boldsymbol{a}}_{n \text{ faktor}}$$

Contoh

Nyatakan dalam bentuk perkalian berulang.

a) 4^3

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

c) $(-3)^4$

Jawab:

a) $4^3 = 4 \times 4 \times 4$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

c) $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

Definisi Pangkat Nol:

a) Untuk setiap a bilangan real bukan nol, maka $a^0 = 1$.

b) Jika *n* bilangan bulat positif dan *a* bilangan bukan nol maka

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Contoh

Nyatakan dengan pangkat nol atau negatif.

a) 5^0

b) $(-6)^0$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$

d) 9^{-1}

Jawab: (Berdasarkan definisi di atas)

a) $5^0 = 1$

b) $(-6)^0 = 1$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

d) $9^{-1} = \frac{1}{9}$

Sifat Bilangan Berpangkat Positif

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$
3. $a^0 = 1$, untuk $a \neq 0$
4. $(a^n)^m = a^{nm}$


Sumber: pixabay.com

Contoh

1. Sederhanakan menjadi satu bilangan berpangkat.
   a) $2^4 \times 2^3$
   b) $2a^4b \times 3a^5b^3$
   c) $\dfrac{a^6}{a^2}$
   d) $(2b^3)^5$

Jawab:

a) $2^4 \times 2^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 2^{4+3} = 2^7$

b) $2a^4b \times 3a^5b^3 = (2 \times 3) \times (a^4 \times a^5) \times (b \times b^3)$
$= 6a^9b^4$

c) $\dfrac{a^6}{a^2} = \dfrac{a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a \times a \times a = a^4$

d) $(2b^3)^5 = 2^{1\times5}b^{3\times5} = 32b^{15}$

Sifat 5:

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dan $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Kita ketahui bahwa $\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 16^1$ dengan menggunakan sifat $(a^n)^m = a^{nm}$. Tarik akar pada kedua ruas, diperoleh $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}$, Hal ini sesuai dengan sifat 5 di atas. Pangkat $\frac{1}{2}$ berarti $\sqrt{\ }$ dari suatu bilangan.

Contoh

a) Sederhanakan bentuk $4^{\frac{3}{2}}$

b) Sederhanakan dengan bilangan pokok 2.

Jawab:

a) $\sqrt{32} \Leftrightarrow \sqrt{32} = (32)^{\frac{1}{2}} = (2^5)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$

b) $4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$

$\sqrt[n]{a}$ mewakili suatu bilangan rasional jika dan hanya jika a adalah perkalian berulang sebanyak n faktor dari suatu bilangan rasional lainnya.

i. $\sqrt{4} = 2 \rightarrow 2 \times 2 = 4$
ii. $\sqrt{9} = 3 \rightarrow 3 \times 3 = 9$
iii. $\sqrt[3]{27} = 3 \rightarrow 3 \times 3 \times 3 = 27$
iv. $\sqrt[5]{-32} = -2 \rightarrow (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$
v. $\sqrt{5}, \sqrt[3]{8} \rightarrow$ bilangan irasional, karen bilangan-bilangan tersebut tidak dapt dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$. Bilangan-bilangan irasional tersebut disebut BENTUK AKAR

- Bentuk akar merupakan bilangan irasional sehingga tidak dapat dinyatakan sebagai perbandingan dua bilangan bulat.

Pangkat Rasional

Untuk setiap bilangan real a dan b, dan bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga $\sqrt[n]{a}$ dan $\sqrt[n]{b}$ adalah real maka:

Sifat:

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \begin{cases} |a|, & \text{jika } n \text{ genap} \\ a, & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Contoh

Sederhanakan.

a) $\sqrt{108} \Leftrightarrow \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{54} \Leftrightarrow \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{4^3} \Leftrightarrow \sqrt{4^3} = 4^{\frac{3}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

Operasi Alajabar bentuk Akar

Jika a dan b bilangan-bilangan rasional positif, maka:

1. $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{b}+\sqrt{a}$
2. $x\sqrt{a}+y\sqrt{a}=(x+y)\sqrt{a}$
3. $\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2=\sqrt{a}\sqrt{b}\times\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{b}=ab$
4. $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$
5. $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

Contoh

Dengan menggunakan sifat pangkat rasional, sederhanakan

a) $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$

Jawab:

$$3\sqrt{5}+4\sqrt{5}=(3+4)\sqrt{5}=7\sqrt{5}$$

b) $2\sqrt{6}\times5\sqrt{3}$

Jawab:

$$2\sqrt{6}\times5\sqrt{3}=2\times5\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}=10\times\sqrt{18}$$
$$=10\times\sqrt{9\cdot2}=10\times3\sqrt{2}=30\sqrt{2}$$

Perhatikan rumus berikut.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)\,(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Contoh

Sederhanakanlah bentuk di bawah ini dengan menggunakan rumus di atas.

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$$

Jawab:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) &= \left(\sqrt{3}\times\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{3}\times\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}\times\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{2}\times\sqrt{3}\right)\\ &= \sqrt{15}-3+\sqrt{10}-\sqrt{6}\end{aligned}$$

Merasionalkan Penyebut Pecahan

$\frac{a}{\sqrt{b}} \longrightarrow$ Suatu pecahan dengan penyebutnya yang merupakan bentuk akar, seringkali dapat dinyatakan dengan mudah sebagai pendekatan desimal, apabila pecahan tersebut diubah terlebih dahulu dengan suatu pecahan yang ekuivalen yang penyebutnya adalah rasional.

Cara merasionalkan akar seperti berikut:

Misalkan a, b adalah bilangan bulat dengan $b \neq 0$, maka

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Kalikan dengan akar penyebutnya.
Contoh soal di bawah ini diselesaikan dengan mengalikan akar sekawannya.

$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \times \boxed{\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}} = \frac{1-2\sqrt{2}+2}{1-2} = 2\sqrt{2}-3$$

Persamaan Eksponen Sederhana

Bentuk $a^{f(x)} = a^{c}; c$ konstanta dan $a > 0, a \neq 1$ $f(x) = c$

Menentukan nilai x, jika $3^{x} = 27$ maka

$3^{x} = 27 \Leftrightarrow 3^{x} = 3^{3}$

Jadi, $x = 3$.

Tulis 27 sebagai bilangan pangkat (bilangan pokok 3)

Bentuk $a^{f(x)} = a^{g(x)};\ a > 0$ dan $a \neq 1$ $f(x) = g(x)$

Menentukan nilai x yang memenuhi $2^{3x} = 4^{2x-1}$ adalah

$$2^{3x} = 4^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{3x} = (2^{2})^{2x-1}$$

$$3x = 4x - 2$$

Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $x = 2$.

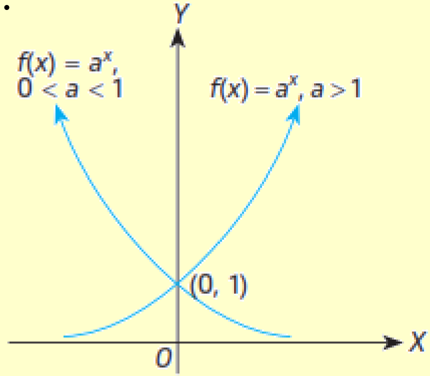
1.3 Fungsi Eksponen

Suatu fungsi $f: x \to a^x$ yang memetakan setiap bilangan rasional x ke a^x.

Definisi:

Fungsi eksponensial f dengan bilangan pokok a (a $konstan$) adalah fungsi yang didefinisikan dengan rumus:

$$f(x) = a^x, a > 0, dan\ a \neq 1$$



Gambar grafik eksponensial

Grafik Fungsi Eksponensial

Jika kurva fungsi $y = a^x$ Digambar pada diagram Cartesisus, maka:

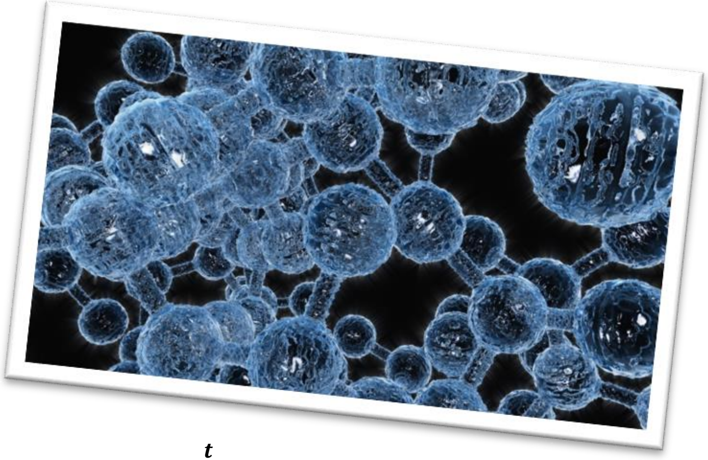
1. kurvanya akan monoton turun jika $0 < a < 1$,
2. Kurvanya monoton naik jika $a > 1$.
3. Memotong sumbu Y di titik $(0, 1)$, dan
4. sumbu X sebagai asimtot.

Contoh Kasus

Massa y gram suatu radioaktif yang mengalami penyusutan dalam t tahun ditentukan oleh rumus $y = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$.

a) Berapakah massa y mula-mula, apabila $t = 0$?

b) Berapakah massa y setelah 80 tahun?



a) Untuk $t = 0$, maka massanya adalah

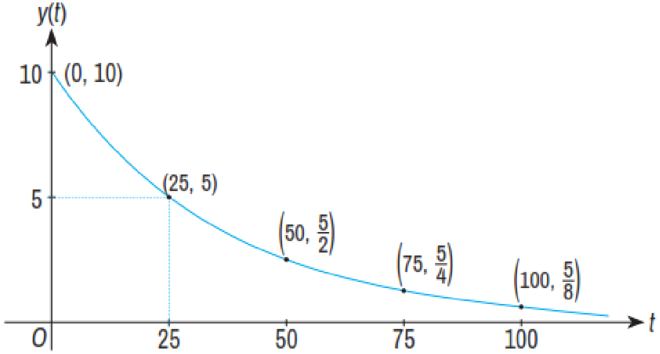
$$y = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0}{25}}$$

$$y = 10(1) = 10 \text{ gram}$$

b) Untuk $t = 80$, maka massanya adalah

$$y = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{80}{25}} = 100(0,5)^{3,2} \approx 1,088 \text{ gram}$$

Grafik fungsi $y = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$ pada gambar di bawah ini



1.4 Logaritma

Definisi:

Untuk $a > 0$ dan $a \neq 1$

$$y = {}^{a}\log x \Leftrightarrow a^{y} = x$$

Dalam notasi logaritma bilangan pokok disebut basis. Logaritma dengan bilangan pokok 10 disebut logaritma basis 10.

Contoh

$${}^{2}\log 16 \Leftrightarrow {}^{2}\log 16 = x$$
$$2^{x} = 16$$
$$2^{x} = 2^{4}$$

Jadi, $x = 4$.

$${}^{3}\log 243 \Leftrightarrow {}^{3}\log 243 = m$$
$$3^{m} = 243$$
$$3^{m} = 3^{5}$$

Jadi, nilai $m = 5$.

Sifat-Sifat Logaritma

Jik x dan y bilangan real positif dan r bilangan real, di mana $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka:

1. $a_{\log xy} = a_{\log x} + a_{\log y}$ $\cdots$ (Sifat perkalian)
2. $a_{\log \frac{x}{y}} = a_{\log x} - a_{\log y}$ $\cdots$ (Sifat pembagian)
3. $a_{\log x^r} = r\, a_{\log x}$ $\cdots$ (Sifat perpangkatan)
4. $a_{\log a} = 1$
5. $a_{\log 1} = 0$

Contoh sifat 1

Sederhanakanlah bentuk $2_{\log 4} + 2_{\log 8}$.

Jawab:

$$
\begin{aligned}
{}^2\log 4 + {}^2\log 8 &= {}^2\log 4 \cdot 8 \\
&= {}^2\log 32 \\
&= 5 \text{ (Karena } 2^5 = 32)
\end{aligned}
$$

Contoh sifat 2

Sederhanakan bentuk $^{5}\log 1.000 + {}^{5}\log 8.$

Jawab:

$$^{5}\log 1.000 + {}^{5}\log 8 = 5_{\log \frac{1.000}{8}}$$

$$= 5_{\log 125} = 3 \qquad (\text{Karena } 5^3 = 125)$$

Contoh sifat 3

Sederhanakan bentuk $^{10}\log 28^7.$

Jawab:

$$^{10}\log 28^7 = 7 \cdot {}^{10}\log 28$$

Mengubah Bilangan Pokok Logaritma

Jika x bilangan posistif dan $a > 0, b > 0, b \neq 1$, maka

$$a_{\log x} = \frac{b_{\log x}}{b_{\log a}}$$

Dari sifat di samping, diperoleh sifat

- $a_{\log x} = \dfrac{\ln x}{\ln a}$
- $a_{\log b} \cdot b_{\log x} = a_{\log x}$

Contoh

1. Hasil dari ${}^{5}\log 7$ adalah . . . .

Jawab:

$$2_{\log 7} = \frac{\log 7}{\log 2}$$

$$= \frac{0{,}845}{0{,}301} = 2{,}807$$

2. Hasil dari ${}^{7}\log 1.000$ adalah . . . .

Jawab:

$${}^{7}\log 1.000 = \frac{\log 1.000}{\log 7}$$

$$= \frac{3}{0{,}845} = 3{,}550$$